Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

 высшего профессионального образования

«Хабаровская государственная академия экономики и права»

Кафедра математики и математических методов в экономике

 «УТВЕРЖДАЮ»

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Первый проректор по УР

 Миронова И.Б.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2012 г.

**Вступительный экзамен по математике на заочную форму обучения**

**Вариант №15**

|  |  |
| --- | --- |
| Задание | Варианты ответов |
| 1. Вычислить | 1) 1; 2) 3,5; 3) $-3,5$; 4) 5,1; 5) 2. |
| 2. Найти область определения функции. | 1) $-^{1}/\_{3}<x<^{1}/\_{3}$ ;2) $-^{1}/\_{3}\leq x\leq ^{1}/\_{3}$;3) $x<-^{1}/\_{3}$; 4) $x\geq ^{1}/\_{3}$; 5) $x\in \left(-\infty ,+\infty \right)$. |
| 3. Решить уравнение. | 1) нет решений; 2) 1; 3) 3; 4) 9; 5) $^{1}/\_{3}$. |
| 4. Решить неравенство | 1) $x\geq 2$; 2) $x>1$;3) $1<x<2$;4) $-1\leq x<1$; 5) $1\leq x\leq 2$. |
| 5. Найти произведение экстремумов функции | 1) 6; 2) $4,5$; 3) $-6$; 4) 21; 5) 5. |
| 6. К графику функции  проведена касательная с угловым коэффициентом 9. Найти абсциссу точки касания. |  |
| 7. Бригада маляров начала красить цех. Через 5 дней вторая бригада начала красить другой такой же цех и закончила покраску одновременно с первой. Если бы они стали красить первый цех вместе, то им потребовалось бы на это 6 дней. Сколько времени первая бригада красила цех? |  |

8. При каких значениях $m $функция $f\left(x\right)=2x^{3}-3\left(m+2\right)x^{2}+48mx+6x-3 $возрастает на всей числовой прямой?

**Указания.** В заданиях 1-5 выбрать правильный ответ. В заданиях 6-7 записать ответ рядом с условием (в место для ответа), предварительно выполнив решение. Задание 8 следует выполнить полностью с подробными пояснениями.

Председатель предметной комиссии по математике / Старкова Е.О. / \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Пример решения**

**1.** **Вычислить**



***Решение.***

Выполним вычисление по действиям.

1. Найдём значение выражения в скобках: $5\frac{1}{12}-3\frac{5}{6}=5+\frac{1}{12}-3-\frac{5}{6}=2+\frac{1-2∙5}{12}=2+\frac{1-10}{12}= =2-\frac{9}{12}=2-\frac{3}{4}=\frac{8-3}{4}=\frac{5}{4}$.
2. Выполним умножение: $\frac{5}{4}∙0,64=5∙0,16=0,8$.
3. Вычислим до конца числитель дроби: $0,8+5\frac{1}{5}=0,8+5,2=6$.
4. Вычислим знаменатель дроби: $2\frac{1}{5}+0,8=2,2+0,8=3$.
5. Разделим результат действия 3) на результат действия 4): $6:3=2$.

Таким образом  .

**Ответ: 5) 2.**

**2.** **Найти область определения функции**

****.

***Решение.***

Так как данная функция является логарифмической, то она будет определена лишь в том случае, когда подлогарифмическое выражение будет больше нуля:

$$\frac{3x+1}{1-3x}>0 .$$

Решим данное дробно-рациональное неравенство методом интервалов. Для этого найдём нули числителя и знаменателя дроби, прировняв их к нулю:

$3x+1=0,$ и $1-3x=0,$

 $x=-\frac{1}{3} .$ $x=\frac{1}{3}$ .

На числовой оси отметим данные значения незакрашенными точками, т.к. неравенство строгое и, выражение $\left(1-3x\right)$ находится в знаменателе, то есть нулю равняться не может.

$$x$$

-

$$+$$

-

$$-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}$$

На каждом из получившихся интервале проверим знак выражения $\frac{3x+1}{1-3x}$, стоящего в левой части неравенства. Выберем промежуток, где данное выражение принимает положительные значения:

$$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3} .$$

**Ответ: 1)** $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ .

**3.** **Решить уравнение**

.

***Решение.***

Вынесем за скобки общий множитель $3^{x}$:

$$3^{x}∙\left(2∙\frac{3^{x+1}}{3^{x}}-6∙\frac{3^{x-1}}{3^{x}}-\frac{3^{x}}{3^{x}}\right)=9,$$

$$3^{x}∙\left(2∙\frac{3^{x}∙3}{3^{x}}-6∙\frac{3^{x}}{3∙3^{x}}-1\right)=9,$$

$$3^{x}∙\left(2∙3-\frac{6}{3}-1\right)=9,$$

$$3^{x}∙\left(6-2-1\right)=9,$$

$$3^{x}∙3=9,$$

$$3^{x}=3,$$

$$x=1.$$

**Ответ: 2) 1.**

**4.** **Решить неравенство**



***Решение.***

С учётом области определения логарифмической функции данное неравенство будет равносильно следующей системе неравенств:

$$\left\{\begin{array}{c}log\_{3}\frac{x+1}{x-1}>0,\\log\_{\frac{1}{2}}log\_{3}\frac{x+1}{x-1}\geq log\_{\frac{1}{2}}1 .\end{array}\right.$$

Правая часть второго неравенства данной системы представляет собой число ноль через логарифм по основанию $\frac{1}{2}$, согласно определению логарифма $log\_{a}b=c \rightarrow b=a^{c}$, то есть $log\_{\frac{1}{2}}1=0$. Так как логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{2}$ является убывающей, то переходя во втором неравенстве к сравнению подлогарифмических выражений, знак неравенства поменяется на противоположный:

$$\left\{\begin{array}{c}log\_{3}\frac{x+1}{x-1}>0,\\log\_{3}\frac{x+1}{x-1}\leq 1 .\end{array}\right.$$

Данную систему можно записать в виде двойного неравенства

$$0<log\_{3}\frac{x+1}{x-1}\leq 1 .$$

Так как $0=log\_{3}1$, а $1=log\_{3}3$, то

$$log\_{3}1<log\_{3}\frac{x+1}{x-1}\leq log\_{3}3.$$

Так как логарифмическая функция с основанием 3 является возрастающей, то при переходе на сравнение подлогарифмических выражений знаки неравенств не поменяются:

$$1<\frac{x+1}{x-1}\leq 3 .$$

Это неравенство можно записать в виде системы

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{x+1}{x-1}\leq 3,\\\frac{x+1}{x-1}>1.\end{array}\right.$$

Решим каждое из неравенств в отдельности.

1. $\frac{x+1}{x-1}\leq 3$, $\frac{x+1}{x-1}-3\leq 0.$ Приведём к общему знаменателю

$$\frac{x+1-3\left(x-1\right)}{x-1}\leq 0,$$

$$\frac{x+1-3x+3}{x-1}\leq 0,$$

$$\frac{4-2x}{x-1}\leq 0.$$

Решим получившееся дробно-рациональное неравенство методом интервалов, который описан в задании 2. Приравняв числитель и знаменатель дроби к нулю получаем следующие значения переходных точек $x=2$ и $x=1$. Точку $x=1$ отметим на числовой оси незакрашенной, так как выражение $\left(x-1\right)$ стоит в знаменателе дроби и на самом деле нулю равно быть не может.

$$x$$

-

$$+$$

-

$$1$$

$$2$$

Нам нужны интервалы, на которых выражение $\frac{4-2x}{x-1}$ принимает отрицательные значения:

$$x<1, x\geq 2.$$

1. $\frac{x+1}{x-1}>1, \frac{x+1}{x-1}-1>0$. Приведём к общему знаменателю

$$\frac{x+1-\left(x-1\right)}{x-1}\leq 0,$$

$$\frac{x+1-x+1}{x-1}\leq 0,$$

$\frac{2}{x-1}>0.$

$$x$$

-

$$+$$

$$1$$

$$x>1.$$

Объединим найденные решения в единую систему

$\left\{\begin{array}{c}x<1, x\geq 2,\\x>1 .\end{array}\right.$ $⟹x\geq 2$.

**Ответ: 1)** $x\geq 2$.

**5.** **Найти произведение экстремумов функции**



***Решение.***

В начале найдём точки экстремума функции. Для этого найдём производную данной функции:

$$f^{'}\left(x\right)=\frac{1}{3}∙3x^{2}-\frac{5}{2}∙2x+6=x^{2}-5x+6.$$

Приравняем её к нулю

$$f^{'}\left(x\right)\rightarrow x^{2}-5x+6=0.$$

Найдём корни данного квадратного уравнения

$$x\_{1,2}=\frac{5\pm \sqrt{25-4∙1∙6}}{2}=\frac{5\pm \sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2},$$

$$x\_{1}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3, x\_{2}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Отметим данные критические точки на числовой оси и проверим наличие в них экстремумов, проверив знак производной на каждом получившимся интервале.

$$x$$

+

*-*

+

$$2$$

$$3$$

При переходе через критические точки знак производной меняется, следовательно $x=2 и x=3$ это точки экстремума, причём $x=2$ – это точка максимума, так как знак производной сменился с «+» на «$-$», а $x=3$– это точка минимума, так как смена знака прошла с «$-$» на «+».

Найдём экстремумы функции, то есть вычислим значения функции в точках экстремума.

$$f\_{max}=f\left(2\right)=\frac{1}{3}∙2^{3}-\frac{5}{2}∙2^{2}+6∙2=\frac{8}{3}-10+12=\frac{8}{3}+2=\frac{8+6}{3}=\frac{14}{3}.$$

$$f\_{min}=f\left(3\right)=\frac{1}{3}∙3^{3}-\frac{5}{2}∙3^{2}+6∙3=9-\frac{5}{2}∙9+18=27-\frac{45}{2}=27-22,5=4,5=\frac{9}{2}.$$

Найдём произведение экстремумов $f\_{max}∙f\_{min}=\frac{14}{3}∙\frac{9}{2}=21$.

**Ответ: 4) 21.**

**6.** **К графику функции  проведена касательная с угловым коэффициентом 9. Найти абсциссу точки касания.**

***Решение.***

Угловой коэффициент касательной равен значению производной функции в точке касания:

$k=f^{'}\left(x\_{0}\right).$ $\left(\*\right)$

В нашей задаче $k=9$. Найдём производную функции $f\left(x\right)=1-5x-x^{2}$.

$$f^{'}\left(x\right)=-5-2x.$$

Следовательно, $f^{'}\left(x\_{0}\right)=-5-2x\_{0}$ . Согласно равенству $\left(\*\right)$ получаем $9=-5-2x\_{0}$ , откуда $x\_{0}=-7$.

**Ответ: -7.**

**7.** **Бригада маляров начала красить цех. Через 5 дней вторая бригада начала красить другой такой же цех и закончила покраску одновременно с первой. Если бы они стали красить первый цех вместе, то им потребовалось бы на это 6 дней. Сколько времени первая бригада красила цех?**

***Решение.***

Обозначим за $x$ время работы первой бригады, а за $y$ время работы второй бригады. Всю работу обозначим за 1. Тогда производительность первой бригады $\frac{1}{x}$ , производительность второй бригады $\frac{1}{y}$ , а совместная производительность двух бригад $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$ .

По условию задачи время работы второй бригады на 5 дней меньше времени работы первой бригады. Следовательно $x-y=5$. А совместное время работы 6 дней, следовательно

$$1:\frac{x+y}{xy}=6,$$

$$\frac{xy}{x+y}=6.$$

Получаем следующую систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{c}x-y=5,\\\frac{xy}{x+y}=6.\end{array}\right.$$

Из первого уравнения выразим $y$ и подставим во второе.

$$\left\{\begin{array}{c}y=x-5,\\\frac{x\left(x-5\right)}{x+x-5}=6.\end{array}\right. ⟺ \left\{\begin{array}{c}y=x-5,\\\frac{x^{2}-5x}{2x-5}=6. \end{array}\right. ⟺ \left\{\begin{array}{c}y=x-5,\\x^{2}-17x+30=0.\end{array}\right.$$

Решим второе уравнение в системе, воспользовавшись теоремой Виетта для приведённого квадратного уравнения.

$$x^{2}+px+q=0,$$

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}∙x\_{2}=-p,\\x\_{1}+x\_{2}=q .\end{array}\right.$$

Методом подбора не сложно увидеть, что два числа, удовлетворяющих условиям теоремы Виетта это 15 и 2. Но $x=2 $это посторонний корень, так как при данном значении время работы второй бригады будет отрицательным $y=x-5=2-5=-3$, чего не может быть. Следовательно, время работы первой бригады равно 15 дней.

**Ответ: 15 дней.**

**8.** **При каких значениях** $m $**функция** $f\left(x\right)=2x^{3}-3\left(m+2\right)x^{2}+48mx+6x-3 $**возрастает на всей числовой прямой?**

***Решение.***

Воспользуемся производной для решения данной задачи. Известно, что если производная некоторой функции положительна при любом возможном значении аргумента, то такая функция является возрастающей на всей числовой прямой. Найдём производную исходной функции.

$f^{'}\left(x\right)=6x^{2}-6\left(m+2\right)x+48m+6$.

Таким образом задача сводится к нахождению таких значений параметра $m$, при которых неравенство $6x^{2}-6\left(m+2\right)x+48m+6>0$ или $x^{2}-\left(m+2\right)x+8m+1>0$ будет выполняться при любом действительном значении $x$. Левая часть данного неравенства описывает параболу с ветвями вверх. Если парабола будет находиться выше оси $Ox$, то есть не будет иметь с ней точек пересечения, то функция её описывающая будет принимать только положительные значения при любых значениях аргумента.

Приравняем левую часть неравенства к нулю

$x^{2}-\left(m+2\right)x+8m+1=0$.

Отсутствие корней в данном уравнении обеспечит выполнение вышеописанного условия. Данное уравнение не будет иметь корней лишь в том случае, если его дискриминант будет отрицательным.

$$D=\left(m+2\right)^{2}-4\left(8m+1\right)<0,$$

$$m^{2}+4m+4-32m-4<0,$$

$$m^{2}-28m<0,$$

$$m\left(m-28\right)<0,$$

$$m$$

+

-

+

$$0$$

$$28$$

$0<m<28$.

**Ответ:** $0<m<28$.